



TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

VALEMEID MATEMAATIKAST

TARTU 1980

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Matemaatika õpetamise metoodika
kateeder

VALEMEID MATEMAATIKAST

Koostanud J.Reimand, K.Velsker

TARTU 1980

E e s s õ n a

Käesolev töö sisaldab enamiku koolimatemaatikas vaadeldud valemitest. Ühtlasi on lisatud ka mõned seosed, mida koolis ei käsitleta.

Valemite kogu on mõeldud käsiraamatuks matemaatikaülesannete lahendamisel matemaatika proseminaris, ettevalmistusosakonnas ja -kursustel, kuid ka abivahendiks kõrgema matemaatika õppimisel.

Koostajad

Kinnitatud matemaatikateaduskonna
nõukogus 23. mail 1980. aastal

Tehete järjekord

1. Sulgude puudumisel teostatakse korrutamine ja jagamine kirjutamise järjekorras.

VeaarvutusVea ülem- ja alamtõke

a, b - tehte liikmed

$\bar{U}T$ - ülemtõke

ΔT - alamtõke

$$2. \bar{U}T(a + b) = \bar{U}T(a) + \bar{U}T(b)$$

$$3. \bar{U}T(a - b) = \bar{U}T(a) - \Delta T(b)$$

$$4. \bar{U}T(ab) = \bar{U}T(a) \cdot \bar{U}T(b)$$

$$5. \bar{U}T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\bar{U}T(a)}{\Delta T(b)}$$

$$6. \Delta T(a + b) = \Delta T(a) + \Delta T(b)$$

$$7. \Delta T(a - b) = \Delta T(a) - \bar{U}T(b)$$

$$8. \Delta T(ab) = \Delta T(a) \cdot \Delta T(b)$$

$$9. \Delta T\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\Delta T(a)}{\bar{U}T(b)}$$

Absoluutne ja relatiivne viga

Δ - absoluutne viga

δ - relatiivne viga

x - mõõdetava suuruse tegelik väärtus

a, b - mõõtmistulemused

$$10. |x - a| \leq \Delta a \quad (\text{definitsioon})$$

$$a - \Delta a \leq x \leq a + \Delta a$$

$$x = a \pm \Delta a = a\left(\pm \delta a\right)$$

$$11. \Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b$$

$$12. \Delta(ab) = \Delta a \cdot b + a \cdot \Delta b$$

$$13. \Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\Delta a \cdot b + a \cdot \Delta b}{b^2}$$

$$14. \Delta(a^2) = 2a \cdot \Delta a$$

$$15. \Delta(a^3) = 3a^2 \cdot \Delta a$$

$$16. \Delta(\sqrt{a}) = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$$

$$17. \Delta(\sqrt[3]{a}) = \frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

$$18. \sigma_a = \frac{\Delta a}{a} \text{ (tavaliselt protsentides)}$$

$$19. \sigma(a \pm b) = \frac{\Delta(a \pm b)}{a \pm b}$$

$$20. \sigma(a \cdot b) = \frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$21. \sigma\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

$$22. \sigma(a^2) = 2 \frac{\Delta a}{a}$$

$$23. \sigma(a^3) = 3 \frac{\Delta a}{a}$$

$$24. \sigma(\sqrt{a}) = \frac{\Delta a}{2 \cdot a}$$

$$25. \sigma(\sqrt[3]{a}) = \frac{\Delta a}{3 \cdot a}$$

Protsendid

$$26. p \% \text{ arvust } a \text{ on } \frac{ap}{100}.$$

$$27. \text{Arv tervikuna, millest } b \text{ moodustab } p \%, \text{ on } \frac{b \cdot 100}{p}.$$

$$28. \text{Arv } a \text{ moodustab arvust } b \text{ } \frac{a}{b} \cdot 100 \%.$$

$$29. \text{Arv } b \text{ on arvust } a \text{ suurem } \frac{b-a}{a} \cdot 100 \% \text{ võrra.}$$

$$30. \text{Arv } a \text{ on arvust } b \text{ väiksem } \frac{b-a}{b} \cdot 100 \% \text{ võrra.}$$

Võrrre

$$31. \text{Kui } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ ehk } a : b = c : d, \text{ siis}$$

$$1) ad = bc$$

$$2) \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$3) \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

$$4) \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

$$5) \frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

$$6) \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

$$7) \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$$

$$8) \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$9) \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

32. Kui $a : b : c = m : n : r$, siis

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{r} \text{ (liitvõrre)}$$

Korrutamise abivalemid

$$33. (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$34. (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$35. (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$36. (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$37. (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$38. (a+b+c+\dots+u+v)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \dots + v^2 + 2(ab+ac+\dots+uv)$$

Teguriteks lahutamine

x_1, x_2 - ruutkolmliikme nullkohad

$$39. ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

$$40. a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$41. a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$42. a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ kui } n \text{ on paaritu arv}$$

$$43. a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$44. a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + ab^{n-2} - b^{n-1}), \text{ kui } n \text{ on paarisarv}$$

Absoluutväärtus

$$45. |a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a > 0 \\ 0, & \text{kui } a = 0 \\ -a, & \text{kui } a < 0 \end{cases}$$

$$46. |a| \geq \pm a$$

$$47. |-a| = |a|$$

$$48. |a| - |b| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$49. |a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$50. |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$51. \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ kus } b \neq 0$$

$$52. |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$$

$$53. |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ või } a < x$$

$$54. |x - b| < a \Leftrightarrow b - a < x < b + a$$

$$55. |x - b| > a \Leftrightarrow x < b - a \text{ või } b + a < x$$

Astmed ja juured

$$56. a^0 = 1, \text{ kui } a \neq 0$$

$$57. a^1 = a$$

$$58. a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ tegurit}}, \text{ kui } n \in \mathbb{N}_2$$

$$59. a^{-k} = \frac{1}{a^k}, \text{ kui } a \neq 0 \text{ ja } k \in \mathbb{Z} \text{ või kui } a > 0 \text{ ja } k \in \mathbb{Q}$$

$$60. \sqrt[n]{a} = b, \text{ kui } a \geq 0, b^{2n} = a, b \geq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$61. \sqrt[n+1]{a} = b, \text{ kui } b^{2n+1} = a, n \in \mathbb{N}_1$$

$$62. a^{\frac{m}{n}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m}, & \text{kui } a > 0, m \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \in \mathbb{N}_1 \\ 0, & \text{kui } a = 0, m \in \mathbb{N}_1 \text{ ja } n \in \mathbb{N}_1 \end{cases}$$

$$63. a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$64. a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$65. (ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$66. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$67. (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$68. \sqrt[n]{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{kui } a \geq 0 \\ -a, & \text{kui } a < 0 \end{cases}$$

$$69. \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$70. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$71. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$72. \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$73. \sqrt[n \cdot m]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^p}$$

$$74. \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \frac{\sqrt{A + \sqrt{A^2 - B}} \pm \sqrt{A - \sqrt{A^2 - B}}}{2}$$

$$75. \sqrt{A + \sqrt{B}} \pm \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2 \sqrt{\frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad (\text{liitradikaali valem})$$

Determinandid

$$76. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$77. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

$$78. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$79. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$80. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$81. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$82. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+ka_2 & b_1+kb_2 & c_1+kc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$83. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$84. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+a_1 & b_3+b_1 & c_3+c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

Lineaarvõrrandisüsteem

$$85. \begin{cases} a_1x + b_1y = d_1 \\ a_2x + b_2y = d_2 \end{cases}, \quad x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D} \quad (\text{Crameri valemid})$$

$$\text{kus } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 \\ d_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

Kui 1) $D \neq 0$, on süsteemil üks lahend;

2) $D = 0$ ja vähemalt üks determinantidest D_x , D_y erineb nullist, on süsteem vastuoluline, s.t. lahend puudub;

3) $D = D_x = D_y = 0$, on süsteemil lõpmatult palju lahendeid.

$$86. \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3, \end{cases}$$

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}, z = \frac{D_z}{D} \quad (\text{Crameri valemid}),$$

$$\text{kus } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ja } D_x = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Kui 1) $D \neq 0$, on süsteemil üks lahend;

2) $D = 0$ ja vähemalt üks determinantidest D_x, D_y, D_z erineb nullist, on süsteem vastuoluline, s.t. lahend puudub;

3) $D = D_x = D_y = D_z = 0$, on süsteemil lõpmatult palju lahendeid.

Ruutvõrrand

x_1, x_2 - ruutvõrrandi lahendid

$$87. x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$88. x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q \quad (\text{Vieta valemid})$$

$$89. ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$90. ax^2 + 2kx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

Kuupvõrrand

$$91. ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

teiseneb asendusega $x = y - \frac{b}{3a}$ võrrandiks 92

$$92. y^3 + py + q = 0,$$

$$y_1 = u + v$$

$$y_{2,3} = -\frac{1}{2}(u + v) \pm \frac{1}{2}(u - v)i\sqrt{3} \quad (\text{Cardano valemid}),$$

kus

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

$$i^2 = -1$$

Kompleksarvud

1 - imaginaarühik, kus $i^2 = -1$

a, b, c, d - reaalarvud

93. $i = 1$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i \text{ jne.}$$

94. $a + bi = c + di$, kui $a = c$ ja $b = d$

95. $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$

96. $a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

kus $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \varphi = \frac{b}{a}$

97. $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

$$\begin{aligned} (a + bi)(c + di) &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

98. $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

99. $(a + bi)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} bi + C_k^2 a^{k-2} (bi)^2 + \dots + (bi)^k$

$$(a + bi)^k = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^k = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$$

100. $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$ (Moiivre valem)

101. $\frac{a + bi}{c + di} = \frac{\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i}{1}$

$$\begin{aligned} \frac{a + bi}{c + di} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ &+ i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 102. \sqrt[n]{a + bi} &= \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \\
 &= \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \\
 &\text{kus } k = 0, 1, 2, \dots, n-1
 \end{aligned}$$

Logaritmide

$\log_a b$ - logaritm alusel a arvust b

$\log_{10} b = \log b$ - kümnendlogaritm arvust b

$\log_e b = \ln b$ - naturaallogaritm arvust b (e, vt. valem 300)

$$103. c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b, \text{ kus } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

$$104. a^{\log_a c} = c$$

$$105. \log_a 1 = 0$$

$$106. \log_a a = 1$$

$$107. \log_a (b \pm c) = \log_a (b \pm c), \text{ s.t. ei lihtsustu}$$

$$108. \log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$109. \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

$$110. \log_a b^k = k \log_a b$$

$$111. \log_a \sqrt[k]{b} = \frac{1}{k} \log_a b$$

$$112. \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$$113. \log_b a = \frac{1}{\log_a b},$$

kui valemis (112) $c = a$

$$114. \ln a = \frac{1}{\log c} \cdot \log a = \frac{1}{M} \cdot \log a \approx 2,3026 \log a$$

$$115. \log a = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln a = M \cdot \ln a \approx 0,4343 \ln a$$

Aritmeetiline jada

a_1 - esimene liige

a_n - üldliige (n -es liige)

$$n \in N_1$$

d - aritmeetilise jada vahe

S_n - n esimese liikme summa

$\{a_1 + (n-1)d\}$ - aritmeetiline jada

$$116. a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

$$117. a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_1 + a_{n+1-1}$$

$$118. a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + a_{k+1})$$

$$119. S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

Geomeetriline jada

a_1 - esimene liige

a_n - üldliige (n -es liige)

q - geomeetrilise jada tegur

S_n - n esimese liikme summa

S - lõpmatult kahaneva geomeetrilise jada summa

$\{a_1 q^{n-1}\}$ - geomeetriline jada

$$120. a_n = q \cdot a_{n-1} = a_1 q^{n-1}$$

$$121. a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = \dots = a_1 \cdot a_{n+1-1}$$

$$122. a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$$

$$123. S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$124. S = \frac{a_1}{1 - q}$$

Liitkasviku valem

A - lõppväärtus

a - algväärtus

p - muutumismäär protsentides muutumistsükli vältel

n - muutumistsüklite arv

$$125. A = a(1 \pm \frac{p}{100})^n \text{ (liitkasviku valem)}$$

Kui $n \rightarrow \infty$, siis $A = ae^{\frac{np}{100}}$ (orgaanilise kasvamise valem)

Keskmsed

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ - andmed

f_i - väärtuse x_i esinemise sagedus

\sum - summa märk

$$126. \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \text{ (aritmeetiline keskmine)}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$127. \bar{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}, x_i > 0 \text{ (geomeetriline keskmine)}$$

$$128. \frac{1}{\bar{x}_h} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \text{ (harmooniline keskmine)}$$

$$129. \bar{x}_r = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2)} \text{ (ruutkeskmine)}$$

$$130. \bar{x} > \bar{x}_g > \bar{x}_h$$

Ühendid

n, m, k - naturaalarvud

$n!$ - arvu n faktoriaal

P_n - permutatsioonide arv n elemendist

V_n^m, A_n^m - variatsioonide arv n elemendist m -kaupa

$C_n^m, \left(\frac{n}{m}\right)$ - kombinatsioonide arv n elemendist m -kaupa

$$131. n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$132. 0! = 1$$

$$133. P_n = n!$$

$$134. v_n^n = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$135. C_n^m = \frac{v_n^m}{P_n^m} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$136. C_n^m = C_n^{n-m}, \text{ kui } m \neq n, \text{ siis } C_n^n = C_n^0 = 1$$

$$137. C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

$$138. C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$$

$$139. C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

Newtoni binoomvalem

C_n^m - kombinatsioonide arv n elemendist m -kaupa (valem 135), binoomkordaja

$$140. (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots \\ \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

$$141. T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k \quad (\text{arendi } (k+1)\text{-ne liige})$$

142. Binoomkordajad, nn. Pascali kolmnurk

				1		1					
				1		2		1			
			1		3		3		1		
		1		4		6		4		1	
	1		5		10		10		15		1
	1	6		15		20		15	6		1
1	7	21		35		35		21	7		1

.....

$$143. (a-b)^n = [a + (-b)]^n = C_n^0 a^n - C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 - \\ \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n C_n^n b^n$$

Sündmuste tõenäosus

A, B, C - juhuslikud sündmused

U, Ω - kindel sündmus

V, \emptyset - võimatu sündmus

\bar{A} - sündmuse A vastand-sündmus

n, f - soodsate võimaluste arv või sündmuste toimumise
arv katseseerias

n - kõigi võimaluste arv või katsete arv

$p, P(A)$ - sündmuse A tõenäosus

$w(A)$ - sündmuse A suhteline sagedus

144. $w(A) = \frac{f}{n}$, 1) $0 \leq w(A) \leq 1$

2) $w(V) = 0$

3) $w(U) = 1$

4) $w(A) + w(\bar{A}) = 1$

5) $w(\text{kas } A \text{ või } B) = w(A) + w(B)$,

kui sündmused on teineteist välistavad

6) $w(\text{kas } A \text{ või } B) = w(A) + w(B) - w(\text{nii } A \text{ kui } B)$,

kui sündmused on teineteist mittevälistavad

145. $P(A) = \frac{m}{n}$; 1) $0 \leq P(A) \leq 1$

2) $P(V) = 0$

3) $P(U) = 1$

4) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

5) $P(\text{kas } A \text{ või } B) = P(A) + P(B)$,

kui sündmused on teineteist välistavad

6) $P(\text{kas } A \text{ või } B) = P(A) + P(B) - P(\text{nii } A \text{ kui } B)$,

kui sündmused on teineteist mittevälistavad

Trigonomeetrilised funktsioonid

O - koordinaatide alguspunkt

$(x; y)$ - raadiusvektori \vec{OM} koordinaadid

r - raadiusvektori \vec{OM} pikkus

α - nurk x -telje positiivse suuna ja vektori \vec{OM} vahel

146. $\sin \alpha = \frac{y}{r}$

$\cos \alpha = \frac{x}{r}$

$\tan \alpha = \frac{y}{x}$

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y}$$

$$\sec \alpha = \frac{r}{x}$$

Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste märgid

147.

Veerand	I	II	III	IV
$\sin A$	+	+	-	-
$\cos A$	+	-	-	+
$\tan A$	+	-	+	-
$\cot A$	+	-	+	-

Trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi

148.

A	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
$\cot A$	$\mp \infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\mp \infty$	0

Taandamisvalemid

149.

B =	- A	90° ± A	180° ± A	270° ± A	360° ± A
$\sin B$	$-\sin A$	$\cos A$	$\mp \sin A$	$-\cos A$	$\pm \sin A$
$\cos B$	$\cos A$	$\mp \sin A$	$-\cos A$	$\pm \sin A$	$\cos A$
$\tan B$	$-\tan A$	$\mp \cot A$	$\pm \tan A$	$\mp \cot A$	$\pm \tan A$
$\cot B$	$-\cot A$	$\mp \tan A$	$\pm \cot A$	$\mp \tan A$	$\pm \cot A$

Trigonomeetria põhivalemid ja nende järelused

150. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

151. $\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$

152. $\tan A \cdot \cot A = 1$

153. $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$

154. $1 + \cot^2 A = \frac{1}{\sin^2 A}$

155. $\frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$

Ühe funktsiooni avaldamine teise kaudu

156.

	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$
$\sin A$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2 A}$	$\frac{\tan A}{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 A}}$
$\cos A$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 A}$	—	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}$	$\frac{\cot A}{\pm\sqrt{1+\cot^2 A}}$
$\tan A$	$\frac{\sin A}{\pm\sqrt{1-\sin^2 A}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$	—	$\frac{1}{\cot A}$
$\cot A$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 A}}{\sin A}$	$\frac{\cos A}{\pm\sqrt{1-\cos^2 A}}$	$\frac{1}{\tan A}$	—

Liitmisvalemid

157. $\sin (A \pm B) = \sin A \cdot \cos B \pm \cos A \cdot \sin B$

158. $\cos (A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$

159. $\tan (A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \cdot \tan B}$

160. $\cot (A \pm B) = \frac{\cot A \cdot \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$

Funktsioonid kordsetest nurkadest

161. $\sin 2A = 2 \sin A \cdot \cos A$

162. $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

163. $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

164. $\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}$

165. $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

166. $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

167. $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

168. $\cot 3A = \frac{\cot^3 A - 3 \cot A}{3 \cot^2 A - 1}$

169. $\sin 4A = 8 \sin A \cdot \cos^3 A - 4 \sin A \cdot \cos A$

170. $\cos 4A = 8 \cos^4 A - 8 \cos^2 A + 1$

Funktsioonid poolnurkadest

171. $\sin \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$

172. $\cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}}$

173. $\tan \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$

174. $\cot \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A}} = \frac{\sin A}{1 - \cos A} = \frac{1 + \cos A}{\sin A}$

Märk "+" või "-" võetakse vastavalt sellele, milline on võrduse vasakus pooles oleva trigonomeetrilise funktsiooni märk nurga $\frac{A}{2}$ korral.

Summa teisendamine korrutiseks

175. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$

176. $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$

$$177. \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2}$$

$$178. \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \cdot \sin \frac{A-B}{2}$$

$$179. \tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cdot \cos B}$$

$$180. \cot A \pm \cot B = \frac{\sin(B \pm A)}{\sin A \cdot \sin B}$$

$$181. 1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$$

$$182. 1 - \cos A = 2 \sin^2 \frac{A}{2}$$

Korrutise teisendamine summaks

$$183. \sin A \cdot \sin B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{2}$$

$$184. \cos A \cdot \cos B = \frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{2}$$

$$185. \sin A \cdot \cos B = \frac{\sin(A-B) + \sin(A+B)}{2}$$

$$186. \tan A \cdot \tan B = \frac{\tan A + \tan B}{\cot A + \cot B} = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{\cos(A-B) + \cos(A+B)}$$

$$187. \cot A \cdot \cot B = \frac{\cot A + \cot B}{\tan A + \tan B} = \frac{\cos(A-B) + \cos(A+B)}{\cos(A-B) - \cos(A+B)}$$

Arkusfunktsioonide väärtusi (vt. 147)

188.	a	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
	arcsin a	0°	30°	45°	60°	90°	-30°	-45°	-60°	-90°
	arccos a	90°	60°	45°	30°	0°	120°	135°	150°	180°
	b	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	
	arctan b	0°	30°	45°	60°		-30°	-45°	-60°	
	arccot b	90°	60°	45°	30°		120°	135°	150°	

Arkusfunktsioonid

$$189. -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$190. 0 \leq \arccos x \leq \pi$$

$$191. -\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$$

$$192. 0 < \operatorname{arccot} x < \pi$$

$$193. \arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$194. \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$195. \arctan(-x) = -\arctan x$$

$$196. \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$$

Trigonomeetrilised põhivõrrandid

$$197. \sin x = a, \quad x = (-1)^k \arcsin a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$198. \cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$199. \tan x = a, \quad x = \arctan a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$200. \cot x = a, \quad x = \operatorname{arccot} a + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Nurga suurus radiaanides ja kraadides

α - nurga suurus kraadides

x - nurga suurus radiaanides

$$201. x = \frac{\pi \alpha}{180^\circ}$$

$$202. \alpha = \frac{180^\circ x}{\pi}$$

Täisnurkne kolmnurk

a, b - kaatetid

c - hüpotenuus

A, B - teravnurgad

C - täisnurk

h_c - hüpotenuusile tõmmatud kõrgus

f - a ristprojektsioon hüpotenuusile

g - b ristprojektsioon hüpotenuusile

S - pindala

$$203. S = \frac{ab}{2}$$

$$204. S = \frac{ch_c}{2}$$

$$205. a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{Pythagorase teoreem})$$

$$206. a^2 = fc, b^2 = gc \text{ (Eukleidesse teoreem)}$$

$$207. h^2 = fg$$

$$208. \sin A = \frac{a}{c}$$

$$209. \cos A = \frac{b}{c}$$

$$210. \tan A = \frac{a}{b}$$

$$211. \cot A = \frac{b}{a}$$

$$212. \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a}$$

$$213. \sec A = \frac{c}{b}$$

Kolmnurk

a, b, c - küljed

b', c' - külje a osad, jaotatud vastasnurga poolitajaga

f - külje a ristprojektsioon küljel c

A, B, C - vastavad nurgad

A_1, B_1, C_1 - välisnurgad

h_a - küljele a joonestatud kõrgus

m_a - küljele a joonestatud mediaan

r - siseringjoone raadius

R - ümberringjoone raadius

S - pindala

p - pool ümbermõõtu

$\left. \begin{array}{l} a_1, b_1, c_1 \\ a_2, b_2, c_2 \end{array} \right\}$ sarnaste kolmnurkade küljed

p_1, p_2 - pool sarnaste kolmnurkade ümbermõõdust

S_1, S_2 - sarnaste kolmnurkade pindalad

k - sarnasustegur

$$214. A + B + C = 180^\circ$$

$$215. A_1 + B_1 + C_1 = 360^\circ$$

$$216. A_1 = B + C$$

$$217. a + b > c$$

$$b + c > a$$

$$a + c > b$$

$$218. |a - b| < c$$

$$|b - c| < a$$

$$|a - c| < b$$

$$219. b^2 = a^2 + c^2 - 2cf \quad (b - \text{teravnurga vastaskülge})$$

$$220. b^2 = a^2 + c^2 + 2cf \quad (b - \text{nürinurga vastaskülge})$$

$$221. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (\text{siinusteoreem})$$

$$222. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{koosinusteoreem})$$

$$223. m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$224. m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$225. \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'} \quad (\text{nurgapoolitaja omaaus})$$

$$226. \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$$

$$227. \frac{p_1}{p_2} = k$$

$$228. \frac{s_1}{s_2} = k^2$$

$$229. \frac{s_1}{s_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \dots = \frac{p_1^2}{p_2^2} = k^2$$

$$230. S = \frac{ah_a}{2}$$

$$231. S = \frac{ab \sin C}{2}$$

$$232. S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

$$233. S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{Heroni valem})$$

$$234. S = pr$$

$$235. S = \frac{abc}{4R}$$

$$236. S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$237. S = p^2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

Võrdkülgne kolmnurk

$$238. h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$239. S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Nelinurk

a, b, c, d - küljed (a, b - trapetsi alused)

p - pool ümbermõõtu

h - kõrgus

u, d_1, d_2 - diagonaalid

k - kesklõik

S - pindala

A - nurk

Ruut

$$240. u = a\sqrt{2}$$

$$241. S = a^2 = \frac{u^2}{2}$$

Ristkülik

$$242. S = ab$$

Rööpkülik

$$243. d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$244. S = a \cdot h = ab \sin A$$

Romb

$$245. S = a \cdot h = a^2 \sin A = \frac{d_1 d_2}{2}$$

Trapets

$$246. S = \frac{a+b}{2} h = kh$$

$$247. k = \frac{a+b}{2}$$

Kõõnelinurk

$$248. S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$249. ac + bd = d_1 \cdot d_2$$

Hulknurk

$\left. \begin{array}{l} a_1, b_1, c_1, \dots \\ a_2, b_2, c_2, \dots \end{array} \right\} - \text{sarnaste hulknurkade küljed}$

p_1, p_2 - pool sarnaste hulknurkade ümbermõõdust

S_1, S_2 - sarnaste hulknurkade pindalad

k - sarnasustegur

n - nurkade arv

a - korrapärase hulknurga külge

m - korrapärase hulknurga apoteem

p - korrapärase hulknurga pool ümbermõõtu

S - korrapärase hulknurga pindala

$$250. \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \dots = k$$

$$251. \frac{p_1}{p_2} = k$$

$$252. \frac{S_1}{S_2} = k^2$$

$$253. \frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \dots = \frac{p_1^2}{p_2^2} = k^2$$

$$254. (n-2) \cdot 180^\circ \quad (\text{sisenurkade summa})$$

Korrapärane hulknurk

255. $\frac{360^\circ}{n}$ (välisnurk)

256. $p = \frac{1}{2} na$

257. $S = pm$

Ringjoon ja ring r - raadius a - diameeter l - kaare pikkus x - kesknurk radiaanides n - kraadide arv kesknurgas a - kõõl h - segmendi kõrgus S - pindalaRingjoon

258. $C = 2\pi r$ (π - vt. valem 314)

259. $a = 2r \sin \frac{x}{2}$

Ring

260. $S = \pi r^2 = \frac{\pi a^2}{4}$

Sektor

261. $l = rx = \frac{\pi rn}{180}$

262. $S = \frac{rl}{2} = \frac{r^2 x}{2} = \frac{\pi r^2 n}{360}$

Segment

263. $a = 2\sqrt{2hr - h^2}$

264. $h = r - \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$, kui $h < r$

$$265. S = \frac{1}{2} [lr - a(r - h)] = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{180} - \sin n \right)$$

$$266. S \approx \frac{2}{3} ha$$

Tahkrehad

h - kõrgus

S_k - külgpindala

S_p - põhja pindala

S - täispindala

V - ruumala

Prisma

l - külgserv

p - ristlõike pool ümbermõõtu

a, b, c - risttahuka mõõtmised

d - diagonaal

S_r - ristlõike pindala

$$267. S_k = 2pl$$

$$268. V = S_p h = S_r l$$

Kuup

$$269. d = a\sqrt{3}$$

$$270. S = 6a^2$$

$$271. V = a^3$$

Risttahukas

$$272. d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$273. S = 2(ab + ac + bc)$$

$$274. V = abc$$

Püramiid

a, b, c, \dots - põhiservad

p - põhja pool ümbermõõtu

S_1 - põhjaga paralleelse lõike pindala

a_1, b_1, c_1, \dots - põhjaga paralleelse lõike küljed

p_1 - põhjaga paralleelse lõike pool ümbermõõtu

h_1 - põhjaga paralleelse lõike kaugus tipust

k - sarnasustegur

m - korrapärase püramiidi apoteem

a - korrapärase tetraeedri ja oktaeedri külgserv

$$275. \frac{S_1}{S_p} = \frac{h_1^2}{h^2}$$

$$276. \frac{S_1}{S_p} = \frac{a_1^2}{a^2} = \frac{b_1^2}{b^2} = \dots = \frac{p_1^2}{p^2} = k^2$$

$$277. V = \frac{1}{3} S_p h$$

Korrapärane püramiid

$$278. S_k = pm$$

Korrapärane tetraeeder

$$279. h = \frac{a\sqrt{6}}{9}$$

$$280. S = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$281. V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Korrapärane oktaeeder

$$282. S = 2a^2 \sqrt{3}$$

$$283. V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$$

Tüvipüramiid

S_1, S_2 - põhjade pindalad

a, b - põhjade servad

m - korrapärase tüvipüramiidi apoteem

n - põhja külgede arv

h - kõrgus

$$284. V = \frac{h}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$$

$$285. S_k = \frac{na + nb}{2} \cdot m \quad (\text{korrapärane tüvipüramiid})$$

Põõrdkehad

h - kõrgus

S_k - külgpindala

S_p, S_1, S_2 - põhja(de) pindala(d)

S - täispindala

V - ruumala

m - (tüvi)koonuse moodustaja

r, r_1, r_2 - põhja(de) raadius(ed)

R - kera (sfääri) raadius

d - kera (sfääri) diameeter

Silinder

$$286. S_k = 2\pi rh$$

$$287. S = 2\pi r(h + r)$$

$$288. V = S_p h = \pi r^2 h$$

Koonus

$$289. S_k = \pi rm$$

$$290. S = \pi r(m + r)$$

$$291. V = \frac{h}{3} \cdot S_p$$

Tüvikoonus.

$$292. S_k = \pi (r_1 + r_2)m$$

$$293. S = \pi [r_1^2 + r_2^2 + m(r_1 + r_2)]$$

$$294. V = \frac{h}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$$

Kera

$$295. S = 4\pi R^2$$

$$296. V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}RS$$

Sektor

$$297. S = \pi R(2h + r_1)$$

$$298. V = \frac{\pi}{6} d^2 h = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

Segment

$$299. r_1 = \sqrt{h(2R - h)}$$

$$300. S = \pi (h^2 + 2r_1^2) = \pi (2Rh + r_1^2)$$

$$301. V = \frac{1}{6}\pi h^2(3d - 2h) = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h) = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + h^2)$$

Vöö

$$302. S = 2\pi Rh = \pi dh$$

Kiht

$$303. S = \pi (2Rh + r_1^2 + r_2^2)$$

$$304. V = \frac{1}{2}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + \frac{1}{3}h^2)$$

Jada piirväärtus

a_n, b_n - jada üldliige

$$305. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$306. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$307. \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$308. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ kui } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

$$309. \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$$

$$310. \lim_{n \rightarrow \infty} (c a_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$311. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{b_n} = \begin{cases} 0, & \text{kui } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm \infty \\ \pm \infty, & \text{kui } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \end{cases}$$

$$312. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0, & \text{kui } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \text{ ja } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \pm \infty \\ \pm \infty, & \text{kui } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \text{ ja } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \end{cases}$$

$$313. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,7182\dots$$

$$314. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \sin \frac{180^\circ}{n}\right) = \pi = 3,14159\dots$$

Funktsioonid

a, b, c, e - konstandia ($a \neq 0$)

$n \geq 2$ - naturaalarv

$$315. y = ax \text{ (võrdeline sõltuvus)}$$

$$316. y = \frac{a}{x} \text{ (pööravõrdeline sõltuvus)}$$

$$317. y = ax + b \text{ (lineaarfunktsioon)}$$

$$318. y = x^2 \text{ (ruutfunktsioon)}$$

$$319. y = ax^2 + bx + c \text{ (ruutkolmliige e. ruutpolünoom)}$$

$$320. y = x^3 \text{ (kuupfunktsioon)}$$

$$321. y = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ (kuuppolünoom)}$$

$$322. y = x^n \text{ (astmefunktsioon)}$$

$$323. y = a^x, a > 0, a \neq 1 \text{ (eksponentfunktsioon)}$$

$$324. y = e^x \text{ ehk } y = \exp x \text{ (} a = e \text{)}$$

$$325. y = \log_a x, a > 0, a \neq 1 \text{ (logaritmifunktsioon)}$$

$$326. y = \ln x \text{ (} a = e, \text{ naturaalogaritm)}$$

$$327. y = \log x \quad (a = 10, \text{ k\"unnendlogaritm})$$

$$328. y = \sin x \quad (\text{siinusfunktsioon})$$

$$329. y = \cos x \quad (\text{koosinusfunktsioon})$$

$$330. y = \tan x \quad (\text{tangensfunktsioon})$$

$$331. y = \cot x \quad (\text{kootangensfunktsioon})$$

$$332. y = \arcsin x \quad (\text{arkussiinusfunktsioon})$$

$$333. y = \arccos x \quad (\text{arkuskoosinusfunktsioon})$$

$$334. y = \arctan x \quad (\text{arkustangensfunktsioon})$$

Funktsiooni piirv\"aartus

$$335. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$336. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$337. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$338. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \text{ kui } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

$$339. \lim_{x \rightarrow a} [c f(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$340. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \text{ kui funktsioon on pidev kohal } a$$

$$341. \lim_{x \rightarrow a} \frac{c}{g(x)} = \begin{cases} 0, & \text{kui } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty \\ \pm \infty, & \text{kui } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{cases}$$

$$342. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, & \text{kui } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \text{ ja } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty \\ \pm \infty, & \text{kui } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \text{ ja } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \end{cases}$$

$$343. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2,7182 \dots$$

$$344. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Funktsiooni tuletis Δx - argumendi muut Δy - funktsiooni muut y', y'_x - tuletis argumendi x järgi u, v - funktsioonid

$$345. \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

$$346. y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$347. [f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$348. [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$349. \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$350. [cf(x)]' = c \cdot f'(x)$$

$$351. y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ kui } y = f(u) \text{ ja } u = g(x) \text{ (liitfunktsiooni tuletis)}$$

$$352. f'(x) = \frac{1}{g'[f(x)]} \quad (\text{pöördfunktsiooni tuletis})$$

$$353. y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x) \Rightarrow y' = y [\ln f(x)]' \\ (\text{logaritmiline diferentseerimine})$$

Tuletiste tabel

354. $c' = 0$

355. $x' = 1$

356. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

357. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

358. $(x^a)' = ax^{a-1}$

359. $(e^x)' = e^x$

360. $(a^x)' = a^x \ln a$

361. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

362. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{1}{x} \log_a e$

363. $(\sin x)' = \cos x$

364. $(\cos x)' = -\sin x$

365. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

366. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

367. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

368. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

369. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

370. $(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Kõrgemat järku tuletised

371. $y'' = (y')'$

$$y''' = (y'')'$$

.....

$$y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$$

Tuletise rakendusi

s - tee pikkus

t - aeg

v - kiirus

 (x_0, y_0) -punkt joonel $y = f(x)$

372. Kui $s = f(t)$, siis $v = f'(t)$

373. $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (puutuja võrrand)

374. $y - y_0 = -\frac{1}{f''(x_0)}(x - x_0)$ (normaali võrrand)

375. Kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$, siis x_0 on maksimumkoht

376. Kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$, siis x_0 on miinimumkoht

377. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, kui $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$

Diferentsiaal

378. $dy = f'(x) dx$, kus $dx = \Delta x$

379. $\Delta y \approx dy = f'(x) dx$

380. $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y \approx f(x) + f'(x) \Delta x$

Määramata integraal

c - konstant

C - integreerimiskonstant

 $f(x)$, $h(x)$ - integreeritav funktsioon

$F(x)$ - funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon

$u = u(x)$

$v = v(x)$

$$381. \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ kui } F'(x) = f(x)$$

$$382. \int [f(x) \pm h(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int h(x) dx$$

$$383. \int c f(x) dx = c \int f(x) dx$$

Integraalide tabel

$$384. \int x^n dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, & \text{kui } n \neq -1 \text{ ja } n \in \mathbb{R} \\ \ln|x| + C, & \text{kui } n = -1 \end{cases}$$

$$385. \int e^x dx = e^x + C$$

$$386. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ kui } a > 0$$

$$387. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$388. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$389. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$390. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$391. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

$$392. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$393. \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$394. \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

$$395. \int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$396. \int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

$$397. \int f(x) \, dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) \, dt, \text{ kus } x = \varphi(t) \\ (\text{muutuja vahetus})$$

$$398. \int u \, dv = uv - \int v \, du \quad (\text{ositi integreerimine})$$

Määratud integraal

a, b, c - integreerimisrajad

C - konstant

$n \in \mathbb{N}$

$$399. \int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x)$$

(Newton-Leibnizi valem)

$$400. \int_a^a f(x) \, dx = 0$$

$$401. \int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

$$402. \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

$$403. \int_a^b [f(x) \pm h(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b h(x) \, dx$$

$$404. \int_a^b C f(x) \, dx = C \int_a^b f(x) \, dx$$

$$405. \int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

$$406. \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]$$

(ristkülikvalem), kus $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$$407. \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \left\{ f(x_0) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + f(x_n) \right\},$$

kus $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

(trapetsvalem)

$$408. \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

n - paarisarv, kus $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

(Simpsoni valem)

Vektor

\vec{v} , \vec{AB} - vektor

$|\vec{v}|$, v - vektori pikkus (moodul)

$(X; Y; Z)$ - vektori koordinaadid

k, r, s - skalaarid

$A(x_1; y_1; z_1)$ - vektori alguspunkt

$B(x_2; y_2; z_2)$ - vektori lõpppunkt

t - sirge, telg

φ - nurk sirge ja vektori (vektorite) vahel

$\text{pr}_t \vec{v}$ - vektori v ristprojektsioon sirgele t

α, β, γ - vastavad nurgad vektori \vec{v} ja koordinaattelgede positiivsete suundade vahel

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - koordinaattelgede ühikvektorid

$$409. |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$410. \vec{v} = (X; Y; Z) = \vec{X}\vec{i} + \vec{Y}\vec{j} + \vec{Z}\vec{k}$$

$$411. \vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$

$$412. |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2} = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$413. \vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, Z_1 = Z_2$$

$$414. \text{pr}_t \vec{v} = |\vec{v}| \cos \varphi$$

$$415. X = |\vec{v}| \cos \alpha$$

$$Y = |\vec{v}| \cos \beta$$

$$Z = |\vec{v}| \cos \mu$$

$$416. \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \mu = 1$$

Lineaartehted

$$417. k\vec{v} = (kX; kY; kZ)$$

$$1) k\vec{v} = \vec{vk}$$

$$2) k(r\vec{v}) = (kr)\vec{v}$$

$$3) (k + r)\vec{v} = k\vec{v} + r\vec{v}$$

$$4) \text{pr}_t(k\vec{v}) = k \text{pr}_t \vec{v}$$

$$418. \vec{v} \pm \vec{u} = (X_1 \pm X_2; Y_1 \pm Y_2; Z_1 \pm Z_2)$$

$$1) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

$$2) \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$$

$$3) k(\vec{v} + \vec{u}) = k\vec{v} + k\vec{u}$$

$$4) \text{pr}_t(\vec{v} + \vec{u}) = \text{pr}_t \vec{v} + \text{pr}_t \vec{u}$$

Skalaarkorrutis

$$419. \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{vu} = |\vec{v}| |\vec{u}| \cos \varphi = |\vec{v}| \text{pr}_v \vec{u} = |\vec{u}| \text{pr}_u \vec{v}$$

$$1) \vec{v} \vec{u} = \vec{u} \vec{v}$$

$$2) \vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{uv} + \vec{uw}$$

$$3) (k\vec{u})\vec{v} = \vec{u}(k\vec{v}) = k(\vec{uv})$$

$$420. \vec{u}\vec{u} = \vec{u}^2 = |\vec{u}|^2 \quad (\text{skalaarruut})$$

$$421. \vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{k}\vec{j} = 0$$

$$422. \vec{uv} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

$$423. \cos \varphi = \frac{\vec{uv}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$424. \vec{uv} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$425. \frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v} \quad (\vec{u}, \vec{v} \text{ kollineaarsus})$$

426. $\vec{v}_t = X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \mu$, kus α, β, μ - vastavad nurgad sirge t ja koordinaattelgedele positiivsete suundade vahel

Vektorkorrutis

427. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$, kus a) $|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin \varphi$,

b) $\vec{w} \perp \vec{u}$ ja $\vec{w} \perp \vec{v}$

c) vektorid \vec{u}, \vec{v} ja \vec{w} moodustavad parema käe kolmiku, s.t. rakendatuna ühest punktist on vektori \vec{u} lühem pööre vektori \vec{v} positiivne, vaadleduna vektori \vec{w} lõpppunktist

428. 1) $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$ (antikommutatiivsus)

2) $\vec{u} \times (k\vec{v}) = (k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$

3) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$

429. $\vec{u} \times \vec{u} = 0$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$430. \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

431. $S = |\vec{u} \times \vec{v}|$ (vektoritele \vec{u} ja \vec{v} ehitatud rööpküliliku pindala)

432. $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{v}$ (\vec{u} , \vec{v} kollineaarsus)

Segakorrutis

$$433. \vec{u}\vec{v}\vec{w} = (\vec{u} \times \vec{v})\vec{w} = \vec{u}(\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = D$$

$$\vec{u}\vec{v}\vec{w} = \vec{w}\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{w}\vec{u} = -\vec{v}\vec{u}\vec{w} = -\vec{w}\vec{v}\vec{u} = -\vec{u}\vec{w}\vec{v}$$

435. $V = |D|$ (ühest punktist rakendatud vektoritele \vec{u} , \vec{v} ja \vec{w} ehitatud rööptahuka ruumala; vastava tetraeedri ruumala leidmiseks jagatakse tulemus arvuga 6)

436. $D = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$, \vec{v} ja \vec{w} komplanaarsus

Sirge

α - tõusunurk

k - tõus

b - algordinaat

a , b - telglõigud

(x_1, y_1) antud punkt

(x, y) - sirge suvaline punkt

φ - nurk sirgete vahel

A , B , C - kordajad sirge ülvõrrandis (vt. 443)

$$437. k = \tan \alpha$$

$$438. k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A}{B}$$

$$439. y = kx + b$$

(tõusu ja algordinaadiga määratud sirge võrrand)

$$440. y - y_1 = k(x - x_1)$$

(tõusu ja punktiga määratud sirge võrrand)

$$441. \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

(kahe punktiga määratud sirge võrrand)

$$442. \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

(telglõikudega määratud sirge võrrand)

$$443. Ax + By + C = 0 \quad (\text{üldvõrrand})$$

$$444. \frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad (\text{normaalvõrrand})$$

Märk ruutjuure ees võetakse vastupidi C märgile

$$445. d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} \right| \quad (\text{punkti } (x_1, y_1) \text{ kaugus sirgest})$$

$$446. \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{ehk } k_1 = k_2 \quad (\text{sirgete paralleelsuse tunnus})$$

$$447. A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0 \quad \text{ehk } k_1 k_2 = -1 \quad (\text{sirgete ristseisu tunnus})$$

$$448. \tan \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad \cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

(nurk sirgete vahel)

Ringjoon

(a, b) - keskpunkt

r - raadius

$$449. x^2 + y^2 = r^2$$

$$450. (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Ellips

- a - suur pooltelg
- b - väike pooltelg
- c - pool fookustevahelisest kaugusest
- e - ekstsentrilisus
- C - ümbermõõt
- S - pindala

$$451. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{kanooniline võrrand})$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

$$452. C \approx \pi [1,5(a + b) - \sqrt{ab}]$$

$$453. S = \pi ab$$

Hüperbool

- a - suur pooltelg
- b - imaginaarne pooltelg
- c - pool fookustevahelisest kaugusest
- e - ekstsentrilisus

$$454. \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{kanooniline võrrand})$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

Parabool

- $\frac{p}{2}$ - fookuse kaugus koordinaatide algusest
- a, b, c - korraajad
- (x_0, y_0) - tipu koordinaadid

455. $y^2 = 2px$ (kanooniline võrrand; horisontaalseks teljeks on x -telg)

456. $y = ax^2 + bx + c$ (telg vertikaalne)

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Tasand

A, B, C, D - kordajad

a, b, c - telglõigud

$(x_1; y_1; z_1)$ - antud punkt

$(x; y; z)$ - suvaline punkt

\vec{n} - tasandi normaalvektor

457. $Ax + By + Cz + D = 0$ (üldvõrrand)

458. $\vec{n} = (A; B; C)$ (tasandi normaalvektor)

459. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

(telglõikudega määratud tasandi võrrand)

460. $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

(normaalvektori ja punktiga määratud tasandi võrrand)

$$461. \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

(kolme punktiga määratud tasandi võrrand)

462. $\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$ (normaalvõrrand; märk ruutjuure ees võetakse vastupidiine D märgile)

$$463. d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \quad \begin{array}{l} \text{punkti } (x_1, y_1, z_1) \\ \text{kaugus tasandist} \end{array}$$

$$464. \cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

(nurk tasandite vahel)

$$465. \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (\text{paralleelsuse tunnus})$$

$$466. A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad (\text{ristseisu tunnus})$$

Sirge ruumis

$\vec{s} = (x_1, y_1, z_1)$ - sirge sihivektor

(x_1, y_1, z_1) - antud punkt

(x, y, z) - suvaline punkt

$$467. \frac{x - x_1}{x_1} = \frac{y - y_1}{y_1} = \frac{z - z_1}{z_1} \quad (\text{kanonilised v\u00f6rrandid})$$

$$468. \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (\text{kahe punktiga m\u00e4\u00e4ratud sirge v\u00f6rrand})$$

$$469. \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{\u00fcldv\u00f6rrandid})$$

$$470. \cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

(nurk sirgete vahel)

$$471. \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (\text{sirgete paralleelsuse tunnus})$$

$$472. x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0 \quad (\text{sirgete ristseisu tunnus})$$

Sirge ja tasand

$\vec{n} = (A; B; C)$ - tasandi normaalvektor

$\vec{s} = (x_1; y_1; z_1)$ - sirge sihivektor

$$473. \vec{n} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 = 0 \quad (\text{sirge ja tasandi paralleelsuse tunnus})$$

$$474. \vec{n} = k\vec{s} \Leftrightarrow \frac{A}{x_1} = \frac{B}{y_1} = \frac{C}{z_1} \quad (\text{sirge ja tasandi ristseisu tunnus})$$

Märksõnastik

- | | |
|-------------------------------|---------------------------------|
| abivalemid 33.-38. | integraal 381.-408. |
| absoluutne viga 10.-17. | integraalide tabel 384.-398. |
| absoluutväärtus 45.-55. | jada piirväärtus 305.-314. |
| aritmeetiline jada 116.-119. | juured ja astmed 56.-75. |
| aritmeetiline keskmine 126. | kera 295.-296. |
| arkusfunktsioonid 188.-192., | keskmised 126.-130. |
| 332.-334. | kiht 303.-304. |
| astmed ja juured 56.-75. | kolmnurk 203.-239. |
| astmefunktsioon 322. | kombinatsioonid 135.-139. |
| determinandid 76.-84. | kompleksarvud 93.-102. |
| diferentsiaal 378.-380. | kompleksarvu trigonomeetriline |
| e 313., 343. | kuju 96., 97., 99.-102. |
| eksponentfunktsioon 323.- | koonus 289.-291. |
| -324. | kordse nurga trigonomeetrilised |
| ellips 451.-453. | funktsioonid 161.-170. |
| Eukleidese teoreem 206. | korrapärane hulknurk 255.-257. |
| faktoriaal 131. | korrapärane oktaeder 282.-283. |
| funktsioonid 315.-334. | korrapärane püramiid 278. |
| funktsiooni piirväärtus 335.- | korrapärane tetraeder 279.-281. |
| -344. | kraadimõõt 201.-202. |
| funktsiooni tuletis 345.-377. | kuup 269.-271. |
| geomeetriline jada 120.-124. | kuupfunktsioon 320. |
| geomeetriline keskmine 127. | kuuppolünoom 321 |
| harmooniline keskmine 128. | kuupvõrrand 91.-92. |
| Heroni valem 233. | kõrgemat järku tuletised 371. |
| hulknurk 250.-257. | kõõlnelinurk 248.-249. |
| hüperbool 454. | liitfunktsiooni tuletis 351. |

- liitkasviku valem 125.
- liitradikaali valem 74.-75.
- lineaarfunktsioon 317.
- lineaartehted vektoritega 417.-418.
- lineaarvõrrandisüsteem 85.-86.
- logaritmid 103.-115.
- logaritmifunktsioon 325.-327.
- määramata integraal 381.-383.
- määratud integraal 399.-408.
- nelinurk 238.-249.
- Newtoni binoomvalem 140.-143.
- nurk 201.-202.
- nurkade summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid 157.-160.
- orgaanilise kasvamise valem 125.
- 314.
- parabool 455.-456.
- Pascali kolmnurk 142.
- permutatsioonid 133., 135.
- poolnurga trigonomeetrilised funktsioonid 171.-174.
- prisma 267.-268.
- protsent 26.-30.
- põõrdfunktsiooni tuletis 352.
- põõrdkehad 286.-304.
- põõrdvõrdeline sõltuvus 316.
- püramiid 275.-283.
- Pythagorase teoreem 205.
- radiaannõõt 201a-202.
- relatiivne viga 18.-25.
- ring 260.
- ringjoon 258.-259., 449.-450.
- ristkülik 242.-243.
- risttahukas 272.-274.
- ruut 240.-241.
- ruutfunktsioon 318.
- ruutkeskmine 129.
- ruutkolmliige 319.
- ruutpolünoom 319.
- ruutvõrrand 87.-90.
- rööpkülik 244.-245.
- segakorrutis 433.-436.
- segment keras 299.-301.
- segment ringis 263.-266.
- sektor keras 297.-298.
- sektor ringis 261.-262.
- silinder 286.-288.
- sirge ruumis 467.-474.
- sirge tasandil 437.-448.
- skalaarkorrutis 419.-426.
- suhteline viga 18.-25.
- sündmuse tõenäosus 144.-145.

- taandamisvalemid 149.
 tšand 457.-466., 473.-474.
 teguriteks lahutamine 39.-44.
 tehete järjekord 1.
 tehted kompleksarvudega 95.,
 97.-102.
 trapets 246.-247.
 trigonomeetria põhivalemid
 150.-155.
 trigonomeetria valemid 146.-
 -187.
 trigonomeetrilised funkt-
 sioonid 146., 328.-331.
 trigonomeetrilised funkt-
 sioonid täisnurkses kolmnur-
 gas 208.-213.
 trigonomeetrilised põhivõrran-
 did 197.-200.
 trigonomeetriliste funktsioo-
 nide korrutise teisendamine
 summaks 183.-187.
 trigonomeetriliste funktsioo-
 nide summa teisendamine korru-
 tiseks 175.-182.
 tuletis 345.-377.
 tuletise rakendusi 372.-377.
 tuletiste tabel 354.-370.
 tõenäosus 144.-145.
 täisnurkne kolmnurk 203.-213.
 tüvikoonus 292.-294.
 tüvipüramiid 284.-285.
 variatsioonid 134., 135.
 vaearvutus 2.-25.
 vektor 409.-436.
 vektorkorrutis 427.-432.
 Vieta valemid 88.
 võrdeline sõltuvus 315.
 võrdkülgne kolmnurk 238.-239.
 võrre 31.-32.
 vöö 302.
 ühendid 131.-139
 ühe trigonomeetrilise funktsioo-
 ni avaldamine teise kaudu 156.

Sisukord

	Lk.
Tehete järjekord	3
Vaarvutus	3
Protsendid	4
Võrre	4
Korrutamise abivalemid	5
Teguriteks lahutamine	5
Absoluutväärtus	6
Astmed ja juured	6
Determinandid	7
Lineaarvõrrandisüsteem	8
Ruutvõrrand	9
Kuupvõrrand	9
Kompleksarvud	10
Logaritmid	11
Aritmeetiline jada	11
Geomeetriline jada	12
Liitksaviku valem	12
Keskmissed	13
Ühenaid	13
Newtoni binoomvalem	14
Sündmuste tõenäosus	14
Trigonomeetrilised funktsioonid	15
Trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste märgid	16
Trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi	16
Tsandamisvalemid	16

Trigonomeetria põhivalemid ja nende järeldused	17
Ühe funktsiooni avaldamine teise kaudu	17
Liitmisvalemid	17
Funktsioonid kordsetest nurkadest	18
Funktsioonid poolnurkadest	18
Summa teisendamine korrutiseks	18
Korrutise teisendamine summaks	19
Arkusfunktsioonide väärtusi	19
Arkuafunktsioonid	19
Trigonomeetrilised põhivõrrandid	20
Nurga suurus radiaanides ja kraadides	20
Täisnurkne kolmnurk	20
Kolmnurk	21
Võrdkülgne kolmnurk	23
Ruut	23
Ristkülik	23
Rõõpkülik	23
Trapets	24
Kõõlnelinurk	24
Hulknurk	24
Korrapärane hulknurk	25
Ringjoon ja ring	25
Sektor	25
Segment	25
Prisma	26
Kuup	26
Risttahukas	26
Püramiid	27

Korrapärane püramiid	27
Korrapärane tetraeeder	27
Korrapärane oktaeeder	27
Tüvipüramiid	28
Pöördkehad	28
Silinder	28
Koonus	28
Tüvikoonus	29
Kera	29
Sektor	29
Segment	29
Võõ	29
Kiht	29
Jada piirväärtus	29
Funktsioonid	30
Funktsiooni piirväärtus	31
Funktsiooni tuletis	32
Tuletiste tabel	33
Kõrgemat järku tuletised	34
Tuletise rakendusi	34
Diferentsiaal	34
Määramata integraal	35
Integraalide tabel	35
Määratud integraal	36
Vektor	37
Lineaartehted	38
Skalaarkorrutis	38
Vektorkorrutis	39

Segakorrutis	40
Sirge	40
Ringjoon	40
Ellips	42
Hüperbool	42
Parabool	42
Tasand	43
Sirge ruumis	44
Sirge ja tasand	45
Märksõnastik	46

ФОРМУЛЫ ПО МАТЕМАТИКЕ. Составители Ган Рейманд, Калле
 Ведскер. На эстонском языке. 2-е издание. На эстонском
 языке. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту,
 ул. Ülikooli, 18.
 Vastutav toimetaja T. Lepmann. Paljundamisele antud 27.06.1980.
 Formaat 30x42/4. Rotaatoripaber. Masinakiri, rotaprint. Ting-
 trükipoognaid 3,02. Arvestuspoognaid 2,72. Trükipoognaid 3,25.
 Trükiarv 1000. Tell. nr. 787. Hind 10 kop. Tartu Riiklik Üli-
 kool. ENSV, Tartu, Ülikooli t. 18. TRÜ trükiakoda. ENSV, Tar-
 tu, Palsoni t. 14.